Prostori $L^p(X)$

8.1 Prostor $L^1(X)$

Ponovimo, ako je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ prostor sa kompletnom merom μ na $\sigma-$ algebri $\mathcal{M}$, tada je $L^1(\mu)$ skup svih kompleksnih merljivih funkcija za koje važi $\int\limits_X |f| d\mu < \infty$. Preslikavanje

$$f \to \|f\| := \int_X |f| d\mu, \ f \in L^1(\mu), \tag{8.1}$$

je seminorma (što se jednostavno dokazuje) na vektorskom prostoru $L^1(\mu)$ (sabiranje funkcija i množenje skalarom je definisano na uobičajeni način: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$). Uvodeći relaciju ekvivalencije

$f \sim g$ ako je $f = g$ s.s., možemo definisati klase ekvivalencije

$$[f] = \{g \in L^1(\mu) : \; g \sim f\}$$

i odgovarajući faktor prostor koji ćemo označiti sa $L^1(X)$. Na $L^1(X)$ definišemo vektorsku strukturu sa $[f+g] = [f]+[g]$, $[\lambda f] = \lambda[f]$. Za elemenat $[f] \in L^1(X)$ definišemo $\|[f]\| := \|f\|$, gde je $\|\cdot\|$ data izrazom (8.1). Primetimo, prema Teoremi 5.3 b) sledi da je ovo preslikavanje dobro definisano (ne zavisi od izbora predstavnika klase). Važi: $\|\cdot\|$ je norma na prostoru $L^1(X)$.

Nadalje ćemo elemenat $[f]$ označavati sa f, vodeći računa da se radi o čitavoj klasi funkcija jednakih s.s.. U tom kontekstu, možemo i prostor $L^1(X)$ identifikovati sa $L^1(\mu)$ i nazivati ga prostorom Lebeg-integrabilnih funkcija (u kojem su prethodno identifikovane sve funkcije jednake skoro svuda).

Kako su funkcije iz $L^1(\mu)$ definisane, ako su definisane do na skup mere nula, možemo uključiti i funkcije koje uzimaju vrednost u radijalnoj kompaktifikaciji skupa $\mathbf{C}$, dakle koje uzimaju i vrednosti "beskonačno" na skupu mere nula. Recimo ako je f realna, ona može da ima vrednosti $+\infty$ ili $-\infty$ na skupu mere nula. Navedimo, kompaktifikaciju skupa $\mathbf{C}$ čini $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup S_\infty$, gde je S_∞ kružnica "beskonačnog poluprečnika", skup tačaka oblika $\infty e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Preciznije, S_∞ je skup fiktivnih tačaka za koje definišemo okoline: V je okolina tačke $\infty e^{i\theta}$ ako sadrži skup oblika $\{re^{i\phi}; r > R_0, |\phi - \theta| < \varepsilon\}$, za neko $R_0 > 0$ i neko $\varepsilon > 0$.

8.2 Prostor $L^p(X)$, $p \geq 1$

Definicija 8.1. Skup funkcija $f : X \to \bar{\mathbf{C}}$ sa osobinom $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, i u kojem identifikujemo funkcije jednake skoro svuda, sa uobičajenim operacijama sabiranja i množenja kompleksnim brojem, je vektorski prostor $L^p(X)$, kraće L^p ako je iz konteksta jasno na kom domenu su definisane funkcije. ▲

Lema 8.1. Preslikavanje

$$f \mapsto \|f\|_p \in \mathbf{R}_+, \quad f \in L^p(X),$$

gde je

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu} \tag{8.2}$$

je norma na $L^p(X)$.

Dokaz: Jasno, $\|f\|_p \geq 0$. Važi, $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ s.s., i $\|\lambda f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |\lambda f|^p d\mu} = |\lambda| \|f\|_p$. Relacija trougla za normu je jedino što preostaje dokazati, a to sledi iz nejednakosti Minkovskog (v. narednu propoziciju). ■

Primetimo da za $p \in (0,1)$ norma $\|\cdot\|_p$ ne bi bila dobro definisana jer ne bi zadovoljavala nejednakost trougla.

Propozicija 8.1. U prostoru $L^p(X)$ važe:

a) Helderova nejednakost

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q, \ f \in L^p(X), g \in L^q(X),$$

gde je $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

b) Koši–Švarcova nejednakost

$$|\int_X fgd\mu| \leq \|f\|_2\|g\|_2, \ f, g \in L^2(X).$$

c) Nejednakost Minkovskog

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \ f, g \in L^p(X),$$

gde je $p > 1$.

Napomena. Brojevi p i q koji se pominju u Helderovoj nejednakosti nazivaju se *konjugovani indeksi.* Treba primetiti da je $p = 2$ sam sebi konjugovani indeks.

Dokaz: a) Neka je $\alpha \in (0,1)$. Posmatrajmo preslikavanje φ definisano sa

$$\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha, \text{ za } t \geq 0.$$

Tada je $\varphi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha-1} = \alpha(1 - t^{\alpha-1})$. Odavde se lako vidi da je $\varphi'(t) < 0$ za $0 < t < 1$, $\varphi'(t) > 0$ za $t > 1$. To znači da je funkcija φ opadajuća za $0 < t < 1$, rastuća za $t > 1$, a minimum dostiže u $t = 1$. Otuda $\varphi(t) \geq \varphi(1)$, za svako $t \geq 0$, odnosno

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha), \text{ za svako } t \geq 0.$$

Ako su a i b ($b \neq 0$) nenegativni brojevi takvi da je $t = \frac{a}{b}$ onda važi:

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$$

(jednakost važi ako i samo ako je $a = b$).

Kako po uslovu teoreme važi $p > 1$ onda je $\frac{1}{p} < 1$, pa možemo uzeti da je $\alpha = \frac{1}{p}$. Tada je $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Ako još stavimo

$$a = \frac{|\, f(x)\,|^p}{\|f\|_p^p}, \ b = \frac{|\, g(x)\,|^q}{\|g\|_q^q}, \quad (a, b \geq 0)$$

i zamenimo u poslednju nejednakost, dobijamo

$$\frac{|\, f(x)g(x)\,|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|\, f(x)\,|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|\, g(x)\,|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Kako su oba sabirka na desnoj strani nejednakosti integrabilna (jer $f \in L^p(X)$ i $g \in L^q(X)$) sledi da je i fg integrabilna funkcija tj. $fg \in L^1(X)$. Šta više,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

odakle direktno sledi Helderova nejednakost.

b) Sledi iz a) za $p = q = 2$.

c) Kako $f, g \in L^p(X)$, važi: $| f + g |^p \leq (2\max\{| f |, | g |\})^p \leq 2^p(| f |^p + | g |^p)$. Dakle, $\int_X | f + g |^p \, d\mu < +\infty$, pa $f + g \in L^p(X)$. Ostaje još da se pokaže nejednakost trougla. Važi

$$\begin{aligned} | f+g |^p &= | f+g | \cdot | f+g |^{p-1} \leq (| f | + | g |) | f+g |^{p-1} \\ &= | f | \cdot | f+g |^{p-1} + | g | \cdot | f+g |^{p-1}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Kako $f + g \in L^p(X)$, tada $| f + g |^p \in L^1(X)$. Dalje, iz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sledi da je $p + q = pq$, odnosno $p = (p-1)q$. Otuda $| f + g |^{p-1} \in L^q(X)$. Primenjujući Helderovu nejednakost na funkcije f i $| f + g |^{p-1}$ dobijamo

$$\int_X | f | \cdot | f+g |^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot (\int_X | f+g |^{(p-1)q} \, d\mu)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Analogno, $\int_X | g || f+g |^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$. Integraleći nejednakost (8.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &\leq \|f\|_p\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

odnosno

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Teorema 8.1. Prostor $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ je kompletan.

Dokaz:

Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ proizvoljan Košijev niz u $L^p(X)$. To znači da za

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall m, n \geq n(\varepsilon))\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon, \tag{8.4}$$

odnosno $\int_X | f_n - f_m |^p \, d\mu < \varepsilon^p$. Iz (8.4) sledi da postoji podniz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ takav da je $\|g_{k+1} - g_k\| < \frac{1}{2^k}, k \in \mathbf{N}$. Definišimo funkciju g na sledeći način:

$$g(x) = | g_1(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |$$

Jasno, g je dobro definisana, nenegativna, merljiva funkcija. Primenjujući Fatuovu lemu na niz funkcija $| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{n} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |, n \in \mathbf{N}$ dobijamo:

$$\int_X | g |^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{n} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |)^p d\mu,$$

odnosno

$$(\int_X | g |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} (\|g_1\| + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|) \leq \|g_1\| + 1.$$

Dakle, ako je $E = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, onda $E \in \mathcal{M}$ i $\mu(E^c) = 0$, pa otuda red $| g_1(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | g_{k+1}(x) - g_k(x) |$ konvergira skoro svuda i funkcija $g\chi_E \in L^p(X)$. Definišimo sada funkciju f na X sa

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}.$$

Kako je $| g_k | \leq \sum_{j=k}^{\infty} | g_{j+1} - g_j | \leq g$ i niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira skoro svuda ka f, tada na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji $f \in L^p(X)$. Pošto važi $| f - g_k |^p \leq 2^p g^p$, na osnovu iste teoreme zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p = 0.$$

Dakle, niz $(g_k)_{k\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f.

Treba još pokazati da čitav niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f. Iz činjenice da je niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev, zaključujemo da za $m \geq n(\varepsilon)$ i dovoljno veliko $k \in \mathbf{N}$ važi:

$$\int_X | f_m - g_k |^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

Primenom Fatuove leme na prethodnu nejednakost dobijamo

$$\int_X | f_m - f |^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X | f_m - g_k |^p \, d\mu \leq \varepsilon^p, \ m \geq n(\varepsilon),$$

odakle sledi da niz (f_n) konvergira u $L^p(X)$ ka f. ■

Specijalno, za $p = 2$, prostor $L^2(X)$ je Hilbertov a skalarni proizvod u njemu je dat sa $(f|g) = \int_X f\bar{g}\, d\mu$.

Propozicija 8.2. Neka je S skup jednostavnih merljivih funkcija s na $(X, \mathcal{M}, \mu)$ za koje je $\mu(\{x \in X;\ s(x) \neq 0\}) < \infty$ i neka je $p \in [1, \infty)$. Skup S je gust u $L^p(X)$.

Dokaz: Jasno, $S \subseteq L^p(X)$. Neka je $f \in L^p(X)$ realna i $f \geq 0$ (ako je f kompleksna, posebno posmatramo njen realan i imaginaran deo razložen na pozitivan i negativan deo: $f = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$). Neka je $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz jednostavnih funkcija datih Teoremom 1.7. Kako je $0 \leq s_n \leq f$, sledi da je $s_n \in L^p(X)$ i $s_n \in S$. Kako je $|f - s_n|^p \leq f^p$, na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi $\|f - s_n\|_p \to 0$, $n \to \infty$. ■

Napomena: Specijalno, ako posmatramo merljiv prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_\mathbf{R}, m)$, tada je $L^p(\mathbf{R})$ kompletiranje prostora $(C_c(\mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$. Ovde $C_c(\mathbf{R})$ označava skup kompleksnih neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem (nosač funkcije f je zatvarenje skupa $\{x \in \mathbf{R} : f(x) \neq 0\}$).

Primer 8.1. Neka je $X = \mathbf{N}$ i μ mera prebrojavanja. Tada se prostor $L^p(\mathbf{N})$, $1 \leq p < \infty$, označava sa l^p. Elemenat prostora l^p je realan ili kompleksan niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ za koji važi da je $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Za $p = \infty$ prostor l^∞ čine ograničeni nizovi i definišemo normu sa $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$.

Primer 8.2. Dat je merljiv prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_\mathbf{R}, m)$ i funkcija $f_a(x) = x^{-a}$, $a > 0$. Tada $f_a\kappa_{(0,1)} \in L^p(\mathbf{R})$ ako i samo ako $p < a^{-1}$ i $f_a\kappa_{(1,\infty)} \in L^p(\mathbf{R})$ ako i samo ako $p > a^{-1}$. Ovaj primer opisuje dva razloga zašto neka funkcija ne mora da pripada prostoru $L^p(\mathbf{R})$: ili $|f|^p$ previše brzo beži u beskonačnost u okolini neke tačke, ili ne opada dovoljno brzo u beskonačnosti. U prvom slučaju se ponašanje $|f|^p$ pogoršava kako se p povećava, a u drugom slučaju se popravlja. Drugim rečima, za $p < q$, funkcije iz L^p mogu biti lokalno singularnije od onih u L^q, dok funkcije iz L^q mogu biti globalno raširenije od onih u L^p.

8.3 Prostor $L^\infty(X)$

Definicija 8.2. Prostor *esencijalno ograničenih funkcija*, u oznaci $L^\infty(X)$, je skup funkcija $f : X \to \bar{\mathbf{C}}$ za koje važi da postoji $A \subseteq X$, $\mu(A) = 0$ i postoji $C > 0$ tako da je

$$\sup |f(x)| \leq C, \ x \in X \setminus A.$$

Ako je $f \in L^\infty(X)$ i ako je $A \subseteq X$, $\mu(A) = 0$, definišemo:

$$S(A) = \sup_{x\in X\setminus A} |f(x)|,$$

i *esencijalni supremum funkcije* dat sa

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{S(N) : \ N \subseteq X, \mu(N) = 0\}.$$

▲

U skupu skoro svuda ograničenih funkcije $L^\infty(X)$ takođe uvodimo relaciju ekvivalencije (identifikujemo funkcije koje su jednake skoro svuda), i definišemo normu sa:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup} f, \quad f \in L^\infty(X).$$

Lema 8.2. Ako je $f \in L^\infty(X)$, tada $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ za skoro svako $x \in X$. Štaviše, ako $M < \|f\|_\infty$, tada postoji merljiv skup $E \subseteq X$ takav da je $\mu(E) > 0$ i $|f(x)| \geq M$, $x \in E$.

Dokaz: Sledi direktno iz definicije i osobina supremuma i infimuma. ■

Lako se proverava da je $\|\cdot\|_\infty$ dobro definisano i da zadovoljava aksiome norme.

Očigledno važi $\|f\|_\infty \geq 0$ i $\|0\|_\infty = 0$. Neka je $\|f\|_\infty = 0$. Tada postoji skup $N_k \in \mathcal{M}$ čija je mera 0, takav da je $| f(x) | \leq \frac{1}{k}$ za $x \notin N_k$. Ako je $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$, onda $N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0$ i $| f(x) | = 0$ za sve $x \notin N$. Odatle $f(x) = 0$ skoro svuda na X.

Osobina $\|\alpha f\|_\infty = | \alpha | \, \|f\|_\infty$ sledi direktno iz osobina supremuma i infimuma.

Ako $f, g \in L^\infty$, tada na osnovu prethodne leme postoje skupovi $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ takvi da je $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ i da važi $| f(x) | \leq \|f\|_\infty$ za $x \notin N_1$ $| g(x) | \leq \|g\|_\infty$ za $x \notin N_2$. Otuda je

$$| f(x) + g(x) | \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ za sve } x \notin N_1 \cup N_2$$

pa je i $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Napomena. Alternativni način da se zapiše $\|\cdot\|_\infty$ norma jeste

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Kako je $\{x \in X : |f(x)| > C\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, gde je $E_n = \{x \in X : |f(x)| > C + \frac{1}{n}\}$, na osnovu Teoreme 2.1 sledi da se infimum dostiže (i u tom slučaju je $\|f\|_\infty = C$) ako je $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

Teorema 8.2. Prostor $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ je kompletan normirani prostor.

Dokaz: Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Košijev niz u $L^\infty(X)$ i $M \in \mathcal{M}, \mu(M) = 0$ takav da je

$$| f_n(x) | \leq \|f_n\|_\infty, \quad x \notin M, \; n = 1, 2, \ldots$$
$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \notin M, \; n, m = 1, 2, \ldots$$

Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira na $X \setminus M$ ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \notin M \\ 0, & x \in M \end{cases}.$$

Odatle sledi da je f merljiva funkcija i vidi se da $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. ■